Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 62

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

19 de septiembre de 2021

1. Calcular $\partial_\mu F^{\mu i}$

Usando la definición de campo eléctrico y magnético:

$$E^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i, \qquad B^i = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A^k \tag{1}$$

La primera expresión se puede escribir de forma inmediata como

$$E^i = F^{i0} = -F^{0i}$$

Para el campo magnético vamos a trabajar un poco la expresión, primero multiplicando por el símbolo de Levi-Civita ε_{imn}

$$\varepsilon_{imn} B^i = \varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}\partial_j A^k$$

Ahora, podemos usar la identidad: $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk} = \delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}$

$$\varepsilon_{imn} B^i = (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})\partial_j A^k = \partial_m A^n - \partial_n A^m = \partial^n A^m - \partial^m A^n = F^{nm} \Longrightarrow F^{ij} = \varepsilon_{jik} B^k$$

Con esto podemos desarrollar el término $\partial_\mu F^{\mu i}$:

$$0 = \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\partial_0 E^i + \varepsilon_{ijk}\partial_j B^k \Longrightarrow \boxed{-\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0} \tag{2}$$

2. Deducir las ecuaciones de Maxwell homogéneas

Partiendo de la identidad de Bianchi

$$\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\mu\alpha} = 0$$

Empecemos definiendo:

$$T^{[\mu\nu]} = \frac{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}}{2}$$

Se puede demostrar fácilmente que, para todo tensor antisimétrico, $T^{[\mu\nu]} = T^{\mu\nu}$. En efecto, si $A^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico:

$$A^{[\mu\nu]} = \frac{A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu}}{2} = \frac{A^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}}{2} = \frac{2A^{\mu\nu}}{2} = A^{\mu\nu}$$

Y definiendo

$$T^{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{T^{\alpha\beta\gamma} - T^{\alpha\gamma\beta} - T^{\beta\alpha\gamma} + T^{\beta\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\gamma\beta\alpha}}{6} = \frac{T^{\alpha[\beta\gamma]} + T^{\beta[\gamma\alpha]} + T^{\gamma[\alpha\beta]}}{3}$$

Podemos comprobar que:

$$\partial^{[\mu} F^{\alpha\beta]} = 0 \tag{3}$$

En efecto, usando la identidad de Bianchi y la antisimetria de F, i.e. $F^{[\mu\nu]} = F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\partial^{[\mu} F^{\alpha\beta]} &:= \frac{\partial^\mu F^{[\alpha\beta]} + \partial^\alpha F^{[\beta\mu]} + \partial^\beta F^{[\mu\alpha]}}{3} \\ &= \frac{\partial^\mu F^{\alpha\beta} + \partial^\alpha F^{\beta\mu} + \partial^\beta F^{\mu\alpha}}{3} = 0\end{aligned}$$

Consideremos ahora la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} \tag{4}$$

Sabemos que el símbolo de Levi-Civita es completamente antisimétrico, por lo que es fácil comprobar que se cumple la propiedad $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu[\nu\alpha\beta]}$. Usando ahora la propiedad $T_{[\alpha\beta\gamma]}U^{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta\gamma}U^{[\alpha\beta\gamma]}$, que se puede demostrar directamente:

$$\begin{aligned}
T_{[\alpha\beta\gamma]}U^{\alpha\beta\gamma} &:= \left(\frac{T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\beta\alpha\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\gamma\beta\alpha}}{6}\right)U^{\alpha\beta\gamma} \\
&= \frac{T_{\alpha\beta\gamma}U^{\alpha\beta\gamma} - T_{\alpha\gamma\beta}U^{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\alpha\gamma}U^{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha}U^{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta}U^{\alpha\beta\gamma} - T_{\gamma\beta\alpha}U^{\alpha\beta\gamma}}{6} \\
&= \frac{T_{\alpha\beta\gamma}U^{\alpha\beta\gamma} - T_{\alpha\beta\gamma}U^{\alpha\gamma\beta} - T_{\alpha\beta\gamma}U^{\beta\alpha\gamma} + T_{\alpha\beta\gamma}U^{\beta\gamma\alpha} + T_{\alpha\beta\gamma}U^{\gamma\alpha\beta} - T_{\alpha\beta\gamma}U^{\gamma\beta\alpha}}{6} \\
&= T_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{U^{\alpha\beta\gamma} - U^{\alpha\gamma\beta} - U^{\beta\alpha\gamma} + U^{\beta\gamma\alpha} + U^{\gamma\alpha\beta} - U^{\gamma\beta\alpha}}{6}\right) \\
&:= T_{\alpha\beta\gamma}U^{[\alpha\beta\gamma]}
\end{aligned}$$

Donde podemos usar que todos los índices son mudos para redefinirlos en la tercera igualdad. Podemos reescribir la ecuación (4) como

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu[\nu\alpha\beta]}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{[\nu}F^{\alpha\beta]} = 0 \tag{5}$$

Por lo que obtenemos las siguientes cuatro ecuaciones: $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = 0$
Para $\mu = 0$; $\varepsilon_{0\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = 0$. En la parte izquierda tenemos $4^3 = 64$ términos sumando, por lo que escribirlos todos no parece una buena idea. Por suerte, sabemos que todos los términos donde ε tenga indices repetidos son cero y no contribuyen a la suma final. Por lo tanto, como $\mu = 0$, todos los términos con ν, α, β igual a cero se anularan, quedando solo los términos:

$$0 = \varepsilon_{0\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = \varepsilon_{0ijk}\partial^{i}F^{jk} = \varepsilon_{ijk}\partial^{i}\left(\varepsilon_{kjl}B^{l}\right) = \varepsilon_{kji}\varepsilon_{kjl}\partial_{i}B^{l} = 2\delta_{il}\partial_{i}B^{l} = 2\partial_{i}B^{i}$$

Donde he usado la propiedad $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$. Por lo que, dividiendo por 2, obtenemos la ecuación

$$\boxed{\partial_{i}B^{i} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0} \tag{6}$$

Nos quedan aún tres ecuaciones: $\mu = i$. De nuevo, todo los términos con índices repetidos en ε se van a anular, por lo que podemos separar la ecuación en tres términos, o bien $\nu = 0$, o bien $\alpha = 0$ o $\beta = 0$:

$$\varepsilon_{i0jk}\partial^{0}F^{jk} + \varepsilon_{ij0k}\partial^{j}F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}\partial^{j}F^{k0} = 0 \tag{7}$$

Fijándonos en los dos últimos términos podemos observar que son idénticos, pues tanto ε como F son antisimétricos al intercambiar los índices 0 y k:

$$\varepsilon_{ij0k}\partial^{j}F^{0k} = (-\varepsilon_{ijk0})\partial^{j}(-F^{k0}) = \varepsilon_{ijk0}\partial^{j}F^{k0} = \varepsilon_{0ijk}\partial_{j}E^{k} = \varepsilon_{ijk}\partial_{j}E^{k}$$

Mientras que el primer término lo podemos reescribir como

$$\varepsilon_{i0jk}\partial^{0}F^{jk} = -\varepsilon_{0ijk}\partial_{0}F^{jk} = -\varepsilon_{ijk}\partial_{0}(\varepsilon_{kjl}B^{l}) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}\partial_{0}B^{l} = 2\partial_{0}B^{i}$$

Sustituyendo en la ecuación (7) obtenemos

$$0 = \varepsilon_{i0jk}\partial^{0}F^{jk} + \varepsilon_{ij0k}\partial^{j}F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}\partial^{j}F^{k0} = 2\partial_{0}B^{i} + 2\varepsilon_{ijk}\partial_{j}E^{k}$$

Dividiendo ahora por 2 obtenemos el resultado final

$$\boxed{\partial_{0}B^{i} + \varepsilon_{ijk}\partial_{j}E^{k} = 0 \Longrightarrow \partial_{0}\vec{B} + \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0} \tag{8}$$